MATHEMATICS Proceedings A 85 (1), March 22, 1982

Die strengen metrischen Kohomologiegruppen des Einheitspolyzylinders verschwinden

by Wolfgang Bartenwerfer

Institut für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum,
Universitätsstraße 150, D-4630 Bochum 1, B.R.D.

Communicated by Prof. T.A. Springer at the meeting of June 20, 1981

EINLEITUNG UND ERGEBNIS

Die im Titel genannten Gruppen werden (zunächst für einen beliebigen reduzierten k-affinoiden Raum X) in der folgenden Weise erklärt: Sei $r \in \mathbb{R}_+^*$ eine fest gewählte Zahl, $\mathfrak{U}$ eine (stets endliche affinoide) Überdeckung von X. Dann bezeichne $C_{\bar{r}}^{\bullet}(\mathfrak{U})$ (bzw. $C_r^{\bullet}(\mathfrak{U})$) den Komplex der Koketten zu $\mathfrak{U}$ mit Werten in der affinoiden Strukturgarbe vom Betrag $\leq r$ (bzw. $<r$). Die Kohomologie werde mit $H_{\bar{r}}^{\bullet}(\mathfrak{U})$ (bzw. $H_r^{\bullet}(\mathfrak{U})$) bezeichnet, es sei entsprechend

$$H_{\bar{r}}^{\bullet}(X) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} H_{\bar{r}}^{\bullet}(\mathfrak{U}), \quad H_r^{\bullet}(X) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} H_r^{\bullet}(\mathfrak{U}).$$

Für $0 \leq \sigma \leq \varrho \in \sqrt{|k|}$, $\varrho > 0$ sei $E_{\varrho,\sigma}$ der "abgeschlossene" Kreisring mit äußerem Radius ϱ, innerem Radius σ, mit dem Mittelpunkt 0, $E_\varrho := E_{\varrho,0}$. Das Ergebnis der Arbeit [2], an die die vorliegende eng anschließt, besagt, daß die Kohomologie $H_{\bar{r}}^{\bullet}(X \times E_{\varrho,\sigma})$ nicht "schlechter" ist als die der Basis X selbst. Beim Beweis wird die Technik der "vergrößerten Überdeckungen" ganz wesentlich benutzt und damit auch, daß es bei der "Lösung" eines Kozyklus f aus $C_{\bar{r}}^q(\mathfrak{U})$ auf eine "kleine" Vergrößerung von $|f|$ nicht ankommt. Daher ist es dem Autor nicht gelungen, für $H_r^{\bullet}$ eine Aussage ähnlicher Allgemeinheit zu beweisen; bei dem völlig anderen Ansatz in [5] treten entsprechende Schwierigkeiten auf. Immerhin hat man das folgende

THEOREM. *Für ein Produkt P der Gestalt $E^n \times E_\varrho$ gilt: Zu jeder Überdeckung $\mathfrak{U}$ von P und jedem $q \geq 1$ existiert eine Verfeinerung $\mathfrak{V}$, so daß für alle $r > 0$*

$$H_r^q(\mathfrak{U}) \to H_r^q(\mathfrak{V})$$

gleich Null ist, insbesondere gilt

$$H_r^q(P) = 0 \text{ für alle } r > 0,\ q \geq 1.$$

BEWEIS DES THEOREMS

Aus [1], [2] ist bekannt, daß man die Nullität von H_r^1 beweisen kann für eine Überdeckung von $P = X \times E_\varrho(y)$, die sich am "Rand" $X \times E_{\varrho,\varrho}$ "gut" verhält. Dabei sei von jetzt an (aus beweistechnischen Gründen) X ein beliebiger reduzierter affinoider Raum.

Wir treffen folgende

DEFINITION. Eine affinoide Überdeckung $\mathfrak{U}$ von P heißt am Rand trivial, wenn die Überdeckung $\mathfrak{U} \cap (X \times E_{\varrho,\varrho})$ trivial ist, d.h. genau ein nicht leeres Element enthält.

BEMERKUNG. Ist $\mathfrak{U}$ am Rand trivial, so gibt es eine Verfeinerung $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{U}$, die ein Element der Gestalt

$$V_0 = X \times E_{\varrho,\sigma}$$

enthält mit $\sigma < \varrho$, so daß für $V_i \in \mathfrak{V}$, $i \neq 0$, gilt $V_i \subset X \times E_\sigma$. Ist $\mathfrak{U}$ vergrößert, läßt sich auch $\mathfrak{V}$ als vergrößerte Überdeckung wählen.

Dabei wird der Begriff "vergrößerte Überdeckung" aus Gründen der Bequemlichkeit allgemeiner als in [2] gebraucht: Ist $\mathfrak{U} = (U_i)_{(i)}$ eine rationale Überdeckung eines affinoiden Raums,

$$U_i = \{ |f_{i,1}|, \ldots, |f_{i,m_i}| \leq |g_i| \}$$

und $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_i)_{(i)}$ mit $1 < \varepsilon_i \in \sqrt{|k|}$, so nennen wir nicht nur $\mathfrak{U}_{\underline{\varepsilon}} = (U_{i,\varepsilon_i})_{(i)}$, wo

$$U_{i,\varepsilon_i} = \{ |f_{i,1}|, \ldots, |f_{i,m_i}| \leq \varepsilon_i |g_i| \}$$

eine vergrößerte Überdeckung, sondern auch die kanonische gemeinsame Verfeinerung $\vee \mathfrak{U}^{(j)}_{\underline{\varepsilon}(j)}$ einer endlichen Familie solcher vergrößerten Überdeckungen. Jede derartige Überdeckung besitzt eine Verfeinerung, die vergrößert im Sinne von [2], § 1.1 ist, vgl. den dortigen Satz 1.1, Folgerungen 1 und 2.

Um Mißverständnisse zu vermeiden, erinnern wir daran, daß wir $\mathfrak{V} \gg \mathfrak{W}$ schreiben, falls $\mathfrak{V}$ feiner als $\mathfrak{W}$ ist.

Wir notieren ein früheres Ergebnis in geeigneter Form.

SATZ 1. *Sei $\mathfrak{U}$ eine vergrößerte Überdeckung von $P = X \times E_\varrho$. Dann gibt es eine vergrößerte Überdeckung $\mathfrak{V}$ von X und zu jedem $B \in \mathfrak{V}$ eine vergrößerte*

Überdeckung

$$\mathfrak{U}_B \gg \mathfrak{U} \cap (B \times E_\varrho),$$

so daß für alle $q > 1$ *und jeden affinoiden Teilbereich* $X' \subset B$ *die kanonische Abbildung*

$$A^q_\infty(\mathfrak{U} \cap (X' \times E_\varrho)) \to A^q_\infty(\mathfrak{U}_B \cap (X' \times E_\varrho))$$

gleich Null ist. ($A^\bullet$ *sei der Unterkomplex der alternierenden Koketten*).

BEWEIS. Nach [2], Satz 1.2 kann man annehmen, daß $\mathfrak{U}$ Spur einer vergrößerten Überdeckung von $X \times E_{\varrho'}$ ist mit einem $\varrho' > \varrho$. Nach Übergang zu den Elementen einer vergrößerten Überdeckung der Basis X kann man nach [2], Satz 1.5 weiter annehmen, daß $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\underline{\omega}, \underline{\varepsilon}, \underline{\varepsilon}')$ eine vergrößerte Laurentüberdeckung zu normierten Polynomen $\omega_\mu \in \mathcal{O}(X)[Y]$ ist. Jetzt kann man Satz 3.3 aus [2] anwenden!

SATZ 2. Sei $\mathfrak{V} = (V_i)_{(0 \le i \le s)}$ *eine rationale Überdeckung von P und es sei*

$$V_0 = \{ |\omega| = \varrho^t \} = \{ |\omega| \geq \varrho^t \},$$

wo $\omega \in \mathcal{O}(X)\langle Y \rangle_\varrho$ *ein Weierstraßpolynom vom Grad* $t > 0$ *sei. Sei* $\mathfrak{V}_\varepsilon$ *die Vergrößerung von* $\mathfrak{V}$ *zu einem festen* $\varepsilon > 1$ *i.S. von* [2], § 1.1, *insbesondere also*

$$V_{0,\varepsilon} = \{ |\omega| \geq \varepsilon^{-1} \cdot \varrho^t \}.$$

Dann gibt es eine vergrößerte Überdeckung $\mathfrak{B}$ *von X und ein* $\varepsilon' \in \sqrt{|k|}$ *mit* $1 < \varepsilon' < \varepsilon$ *und zu jedem* $B \in \mathfrak{B}$ *eine vergrößerte Überdeckung*

$$\mathfrak{V}_B \gg \mathfrak{V}_\varepsilon \cap (B \times E_\varrho) \quad \textit{mit} \quad V_{0,\varepsilon'} \cap (B \times E_\varrho) \in \mathfrak{V}_B,$$

so daß für alle $q > 1$ *und die affinoiden Teilbereiche* $X' \subset B$ *die kanonische Abbildung*

$$A^q_\infty(\mathfrak{V}_\varepsilon \cap (X' \times E_\varrho)) \to A^q_\infty(\mathfrak{V}_B \cap (X' \times E_\varrho))$$

gleich Null ist.

BEWEIS. Wir betrachten die freie X-Überlagerung

$$\varphi: X \times E_\varrho \to X \times E_{\varrho^t},$$

die durch $\varphi^*(Y) := \omega$ gegeben ist. Nach [2], Folgerung aus Hilfssatz 1.3, gibt es eine vergrößerte Überdeckung $\mathfrak{W}$ von $X \times E_{\varrho^t}$ mit $\mathfrak{V}_\varepsilon \ll (\varphi^{-1}(\mathfrak{W}))^\square$. (Dabei bedeutet $\mathfrak{U}^\square$ die Überdeckung, die aus den Zusammenhangskomponenten der Elemente von $\mathfrak{U}$ besteht). Sei $\sigma := \varepsilon^{-1} \cdot \varrho^t$. Mittels der Überdeckung $\mathfrak{W} \cap (X \times E_\sigma)$ konstruiert man leicht Zahlen σ', ϱ' mit

$$\sigma < \sigma' < \varrho' < \varrho^t$$

und eine vergrößerte Überdeckung $\mathfrak{U}$ von $X \times E_{\varrho'}$, für die $\mathfrak{U} \cap (X \times E_{\varrho', \sigma'})$ trivial ist und so daß für die Überdeckung

$$\mathfrak{U}' := \mathfrak{U} \cup \{ X \times E_{\varrho^t, \sigma'} \}$$

ebenfalls gilt $\mathfrak{V}_\varepsilon \lessdot (\varphi^{-1}(\mathfrak{U}'))^\square$. Auf $\mathfrak{U}$ wenden wir nun Satz 1 an, wobei wir annehmen können, daß $\mathfrak{V}$ trivial gewählt werden kann. Wir schreiben für $\mathfrak{U}_X$ aus Satz 1 hier $\mathfrak{H}$; analog zu $\mathfrak{U}'$ setzen wir

$$\mathfrak{H}' := \mathfrak{H} \cup \{X \times E_{\varrho', \sigma'}\}.$$

Für $q > 1$ ist in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A^q_\infty(\mathfrak{U} \cap (X' \times E_{\varrho'})) & \twoheadrightarrow & A^q_\infty(\mathfrak{U}' \cap (X' \times E_{\varrho'})) \\ \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow \\ A^q_\infty(\mathfrak{H} \cap (X' \times E_{\varrho'})) & \rightarrow & A^q_\infty(\mathfrak{H}' \cap (X' \times E_{\varrho'})) \end{array}$$

die obere Waagerechte ein Isomorphismus, also die rechte Senkrechte gleich Null und wegen der Freiheit von φ damit auch

$$A^q_\infty(\varphi^{-1}(\mathfrak{U}') \cap (X' \times E_\varrho)) \rightarrow A^q_\infty(\varphi^{-1}(\mathfrak{H}') \cap (X' \times E_\varrho)).$$

Also ist auch

$$A^q_\infty(\mathfrak{V}_\varepsilon \cap (X' \times E_\varrho)) \rightarrow A^q_\infty((\varphi^{-1}(\mathfrak{U}'))^\square \cap (X' \times E_\varrho)) \rightarrow$$
$$\rightarrow A^q_\infty((\varphi^{-1}(\mathfrak{H}'))^\square \cap (X' \times E_\varrho))$$

gleich Null; $(\varphi^{-1}(\mathfrak{H}'))^\square$ besitzt aber offensichtlich eine Verfeinerung, die vergrößerte Überdeckung ist.

FOLGERUNG 1. *Seien die Voraussetzungen wie in Satz 2. Dann gibt es eine vergrößerte Überdeckung $\mathfrak{V}$ von X und zu jedem $B \in \mathfrak{V}$ eine Überdeckung $\mathfrak{V}_B \gg \mathfrak{V} \cap (B \times E_\varrho)$, so daß für jedes $q \geq 1$, jeden affinoiden Teilbereich $X' \subset B$ und jedes $r > 0$ die kanonische Abbildung*

$$H^q_r(\mathfrak{V} \cap (X' \times E_\varrho)) \rightarrow H^q_r(\mathfrak{V}_B \cap (X' \times E_\varrho))$$

gleich Null ist und so daß $V_0 \cap (B \times E_\varrho) \in \mathfrak{V}_B$.

BEWEIS. Aus der Voraussetzung über V_0 folgt sofort

$$H^1_r(\mathfrak{V} \cap (X' \times E_\varrho)) = 0,$$

da dann die exakte Folge

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(X')\langle Y \rangle_\varrho \rightarrow C^0_\infty(\mathfrak{V} \cap (X' \times E_\varrho)) \xrightarrow{\partial^0_\infty} Z^1(\mathfrak{V} \cap (X' \times E_\varrho)) \rightarrow 0$$

isometrisch spaltet, s. [1], Sätze 2.3 und 2.4. Im folgenden sei daher stets $q > 1$. Wir betrachten eine feste Vergrößerung $\mathfrak{V}_\varepsilon$ und dazu $\mathfrak{V}$ und $(\mathfrak{V}_B)_{(B \in \mathfrak{V})}$ wie in Satz 2. Sei $X' \subset B \in \mathfrak{V}$ fest. Wir schreiben in dem folgenden Diagramm immer $\mathfrak{V}$ statt $\mathfrak{V} \cap (X' \times E_\varrho)$ usw. ...

$$\begin{array}{ccccc} Z(A^q_r(\mathfrak{V})) & \hookrightarrow & Z(A^q_\infty(\mathfrak{V})) & \xleftarrow{\nu} & Z(A^q_\infty(\mathfrak{V}_\varepsilon)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ Z(A^q_r(\mathfrak{V} \vee \mathfrak{V}_B)) & \hookrightarrow & Z(A^q_\infty(\mathfrak{V} \vee \mathfrak{V}_B)) & \leftarrow & Z(A^q_\infty(\mathfrak{V}_B)). \end{array}$$

Es ist $\mu=0$ und ν hat dicht liegendes Bild, vgl. [1], Beweis des Satzes 2.2. Wir wollen zeigen, daß jeder Kozyklus $f^q \in A^q_r(\mathfrak{B})$ in $H^q_r(\mathfrak{B} \vee \mathfrak{B}_B)$ das Bild 0 hat. Da

$$A^{q-1}_\infty(\mathfrak{B}) \xrightarrow{\partial^{q-1}_\infty} Z(A^q_\infty(\mathfrak{B}))$$

offen ist, gibt es ein $g^{q-1} \in A^{q-1}_r(\mathfrak{B})$, so daß

$$f^q - \partial g^{q-1} \in \text{Bild } \nu.$$

Man kann also $f^q \in \text{Bild } \nu$ annehmen. Ein solches f^q hat aber bereits in $A^q_r(\mathfrak{B} \vee \mathfrak{B}_B)$ triviales Bild. Schreibt man wieder $\mathfrak{B}_B$ für $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{B}_B$, ist die Behauptung bewiesen.

Durch "Treppensteigen" ergibt sich wie in [2], § 3.3.

FOLGERUNG 2. *Sei $\mathfrak{B}$ wie in Satz 2, $q \geq 1$ fest. Dann existiert eine (vergrößerte) Überdeckung $\mathfrak{B}$ von X und eine Überdeckung $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{B}$, so daß für jedes $r>0$ bei den Homomorphismen*

$$H^q_r(\pi^{-1}(\mathfrak{B})) \to H^q_r(\pi^{-1}(\mathfrak{B}) \vee \mathfrak{U}) \leftarrow H^q_r(\mathfrak{B})$$

das Bild von $H^q_r(\mathfrak{B})$ im Bild von $H^q_r(\pi^{-1}(\mathfrak{B}))$ liegt. (Dabei sei $\pi: P \to X$ die Projektion.)

Es bleibt nun im Fall $X=E^n$ die Voraussetzung des Satzes 2 herzustellen. Dies geschieht mit den folgenden beiden Hilfssätzen.

HILFSSATZ 3. *Sei $0 \neq f \in k\langle X_1, \dots, X_n \rangle \langle Y \rangle_\varrho$. Dann gibt es einen Automorphismus φ^* von $T_n\langle Y \rangle_\varrho$ der Gestalt*

$$\varphi^*(Y) = Y, \ \varphi^*(X_i) = X_i + (cY^s)^{d_i}, \ i=1, \dots, n,$$

wo $s = \operatorname{ord}$ (ϱ mod $|k^*|$), $c \in k^*$ mit $|c^{-1}| = \varrho^s$ und $d_i \in \mathbb{N}^*$, so daß $\varphi^*(Y)$ Y-allgemein ist.

BEWEIS. Durch $Y \rightsquigarrow cY^s$ ist ein endlicher T_n-Monomorphismus

$$\psi^*: T_n\langle Y \rangle \to T_n \langle Y \rangle_\varrho$$

gegeben, so daß $\tilde{\psi}^*$ ein Isomorphismus ist. Nach Übergang zu einer Potenz kann man annehmen $|f|=1$ und dann schließlich $f=\psi^*(h)$ mit $|h|=1$. Nun läßt sich bekanntlich ein Automorphismus φ^* von $T_n\langle Y \rangle$ der Gestalt

$$Y \rightsquigarrow Y, \ X_i \rightsquigarrow X_i + Y^{d_i}$$

finden, so daß $\varphi^*(h)$ Y-allgemein ist. Dies φ^* läßt sich in der oben hingeschriebenen Form zu einem Automorphismus von $T_n\langle Y \rangle_\varrho$ fortsetzen.

HILFSSATZ 4. *Sei $\mathfrak{U}$ eine rationale Überdeckung von $P = E^n \times E_\varrho$. Dann gibt es einen Automorphismus φ von P, so daß $\varphi^{-1}(\mathfrak{U})$ eine Verfeinerung $\mathfrak{B}$ besitzt, die ein Element der Gestalt $\{|\omega| = \varrho^t\}$ enthält, wo $\omega \in T_n\langle Y \rangle_\varrho$ ein Weierstraßpolynom vom Grad $t>0$ ist.*

BEWEIS. Sei $\mathfrak{U} = (U_i)_{(i=1,\ldots,s)}$,

$$U_i = \{ |f_{i,1}|, \ldots, |f_{i,n_i}| \leq |g_i| \}.$$

Nach Anwendung eines Automorphismus von P kann man annehmen, daß alle g_i und $f_{i,j}$ Y-allgemein sind, also auch, daß die g_i Weierstraßpolynome sind. Wir zeigen, daß für mindestens ein i gilt

$$\max_{1 \leq \nu \leq n_i} \|f_{i,\nu}\| \leq \|g_i\|$$

(Dann setze man $\omega := Y \cdot g_i$). Andernfalls würde etwa für alle i gelten

$$\|f_{i,1}\| > \|g_i\|$$

und daher für alle $(x,y) \in P$

$$|\prod_i f_{i,1}(x,y)| < \prod_i \|f_{i,1}\|,$$

also

$$\|\prod_i f_{i,1}\| < \prod_i \|f_{i,1}\|.$$

LITERATUR

1. Bartenwerfer, W. – Die erste metrische Kohomologiegruppe glatter affinoider Räume. Indag. math. **40**, 1-14 (1978).
2. Bartenwerfer, W. – Die höheren metrischen Kohomologiegruppen affinoider Räume. Math. Ann. **241**, 11-34 (1979).
3. Bartenwerfer, W. – Die Lösung des nichtarchimedischen Corona-Problems für beliebige Dimension. J. reine u. angew. Math. **319**, 133-141 (1980).
4. Van der Put, M. – The non-archimedian Corona Problem, Bull. Soc. Math. France, Mém. **39-40**, 287-317 (1974).
5. Van der Put, M. – Cohomology on affinoid spaces. Erscheint demnächst in Comp. math.